EX 12 :

1. $f(x)=|x| \quad x\in\mathbb{R}$

a) *f est continue sur* $\mathbb{R}$

b) $\begin{cases} f(x)=x & \sin x\in[0,+\infty[\\ f(x)=-x & \sin x\in\,]-\infty,0[\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2+a & pour\ x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2+b & pour\ x<0 \end{cases}$$

F est dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ *F continue en* 0

$\Rightarrow a=b$

$$d'où \begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2+a & pour\ x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2+a & pour\ x<0 \end{cases}$$

$F(4)=0 \Rightarrow 8+a=0 \Rightarrow a=-8$

$$\begin{cases} F(x)=\frac{1}{2}x^2-8 & pour\ x\geq 0 \\ F(x)=-\frac{1}{2}x^2-8 & pour\ x<0 \end{cases}$$

2. $g(x)=|x|+|x-1|$

a) *g est continue sur IR*

x	-∞	0	1	+∞
|x|	-x	x	x	
|x-1|	-x+1	-x+1	x-1	
g(x)	-2x+1	1	2x-1	

$$\begin{cases} g(x)=-2x+1 & pour\ x\leq 0 \\ g(x)=1 & pour\ 0<x\leq 1 \\ g(x)=2x-1 & pour\ x>1 \end{cases}$$

d'où

$$G(x)=\begin{cases} -x^2+x+a & pour\ x\leq 0 \\ x+b & pour\ 0<x\leq 1 \\ x^2-x+c & pour\ x>1 \end{cases}$$

G est continueen 0

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} G(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) \Rightarrow a=b$

G continue en $1\Rightarrow$

$1+b=c \Rightarrow c=a+1$

d'où

$$G(x)=\begin{cases} -x^2+x+a & pour\ x\leq 0 \\ x+a & pour\ 0<x\leq 1 \\ x^2-x+a+1 & pour\ x\geq 1 \end{cases}$$

$(a\in\mathbb{R})$

EX 13 :

$f(x)=\sin^3 x+\sin^5 x$

$=\sin x.(1-Cos^2 x)+\sin x.(1-Cos^2 x)^2$

$=\sin x-\sin x\,Cos^2 x+\sin x.(1+Cos^4 x-2Cos^2 x)$

$f(x)=2\sin x-3\sin x.\,Cos^2 x$

$\quad +\sin x.Cos^4 x$

$$F(x)=-2Cos\,x+Cos^3 x-\frac{1}{5}Cos^5 x$$

(on pourra aussi linéariser f(x))

EX 14 :

$$a(t)=1-\frac{1}{(t+1)^2} \quad ; t\in[0,10]$$

1. $\begin{cases} v'(t)=a(t) \\ v(0)=0 \end{cases}$

$$v(t)=t+\frac{1}{t+1}+k$$

$v(0)=0 \Rightarrow 1+k=0 \Rightarrow k=-1$

$$v(t)=t-1+\frac{1}{t+1}$$

2. $v(10)=\frac{100}{11}m/s$